2 Propriétés de l'exponentielle

A RETENIR

- L'exponentielle est définie sur tout $\mathbb{R}$ et est toujours positive.
- Pour tous x, y, $\exp(x+y) = \exp x . \exp y$.
- Notation e^x, dite exponentielle.
- $\exp(\ln x) = x, e^0 = 1, e^1 = e$.
- L'exponentielle est sa dérivée et $(e^u)' = u'e^u$.
- $\lim_{-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{+\infty} e^x = +\infty$.

2.1 Premières propriétés

Choisissons deux axes perpendiculaires et la même unité sur chacun d'eux (c'est ce qu'on appelle un repère orthonormé). Appelons Δ la droite d'équation $y = x$. Alors pour tous a, b les deux points (a, b) et (b, a) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Δ.

On peut donc tracer la courbe représentative de l'exponentielle à partir de celle du logarithme. Il vient immédiatement

Proposition 1 *La fonction exponentielle est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, prend des valeurs positives, est croissante,* $\exp(0) = e^0 = 1, \exp(1) = e^1 = e, \lim_{+\infty} \exp(x) = +\infty, \lim_{-\infty} \exp(x) = 0$.

2.2 Propriétés analytiques

Proposition 2 *L'exponentielle est dérivable et est égale à sa dérivée*

$$\forall x, (e^x)' = e^x.$$

Preuve C'est une conséquence du théorème de bijection. On peut aussi le voir directement.

Rappelons que le nombre dérivé en un point a de la fonction exponentielle, s'il existe, est la limite, si elle existe, du taux d'accroissement $\dfrac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. De la définition de l'exponentielle découle que $\ln(\exp(a)) = a, \ln(\exp(a+h)) = a + h$. On voit donc que ce taux d'accroissement est l'inverse de $\dfrac{\ln(b+k) - \ln b}{k}$, qui est le taux d'accroissement du logarithme en b si l'on pose $b = \exp(a)$ et $k = \exp(a+h) - \exp(a)$.

Dire que h tend vers 0 implique que k tend vers 0 et réciproquement.

Comme le logarithme est dérivable, cet inverse admet pour limite lorsque k tend vers 0 le nombre $\frac{1}{b}$, qui est non nul. Donc le quotient $\dfrac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h}$ admet pour limite lorsque h tend vers 0 le nombre $b = \exp a$. $\square$

Corolaire 1 *Si u est une fonction dérivable sur un certain intervalle I,* $(e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$.

Proposition 3 *L'exponentielle définit une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$ *et sa bijection réciproque est le logarithme. Autrement dit,* $\exp(\ln x) = x$.

Preuve L'exponentielle est croissante strictement, définie sur $\mathbb{R}$ et ses limites aux bornes sont 0 et ∞. Donc elle définit une bijection entre ces deux intervalles.

Etant donné y, on cherche le nombre x solution de $\exp(x) = y$. Or $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ puisque le logarithme est une bijection. Prenant le logarithme de chaque membre on trouve $x = \ln y$. $\square$

2.3 Propriété fondamentale

Proposition 4 *Pour tous nombres* $a, b, \exp(a+b) = \exp a \exp b$.

Preuve Puisque le membre de droite est un produit, calculons son logarithme

$$\ln(\exp a \exp b) = \ln \exp a + \ln \exp b = a + b.$$

On termine en reprenant son exponentielle et en tenant compte de ce que $\exp(\ln U) = U$. $\square$

Remarque 1 *Ceci justifie la notation en exposant car on sait que pour effectuer un produit de puissances, on effectue la somme des exposants. C'est exactement la propriété algébrique de l'exponentielle.*

3 Compléments sur le logarithme et l'exponentielle, et autres fonctions

3.1 Tangentes et majorations du logarithme

Positions relatives de deux courbes Soient deux fonctions f, g sur un même intervalle I. La courbe C_f contient tous les points $(x, f(x)), x \in I$ et la courbe C_g contient tous les points $(x, g(x)), x \in I$. C'est ce que traduisent leurs équations, $y = f(x)$ pour C_f et de même pour C_g.

Soient deux points M, N de même abscisse x. Le point M est en-dessous de N si son ordonnée est inférieure à celle de N. En faisant varier x, on voit que la courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g si $f \leq g$. En conséquence pour étudier ces positions relatives, on calcule $f - g$ pour trouver son signe. Pour cela, soit on factorise $f - g$ soit on étudie ses variations.

Proposition 5 *La courbe représentative du logarithme est en-dessous de sa tangente en* $x = 1$*, donc* $\ln(x) \leq x - 1$.

Preuve Ces positions relatives sont donnée par le signe de la fonction

$$d(x) = \ln x - (x - 1).$$

Or $d'(x) = \frac{1}{x} - 1$ négative sur $]1, +\infty[$, et positive sur $]0, 1[$. De plus $d(1) = 0$. Donc $d \leq 0$.$\square$

Corolaire 2 $\ln(1 + x) \leq x$.

Obtenu à partir de ce qui précède en remplaçant x par $1 + x$.

Corolaire 3 $e^x \geq x + 1$.

Obtenu à partir du précédent en prenant l'exponentielle de chacun des membres, puisque l'exponentielle est croissante.

3.2 Comparaisons asymptotiques avec les puissances

Etude de la fonction $Q(x) = \frac{\ln x}{x}$. Elle est définie sur $]0, +\infty[$ et admet $-\infty$ pour limite en 0 à droite. Sa dérivée est $\frac{1-\ln x}{x}$, positive sur $]0, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$. On peut donc appliquer la version appropriée du principe de la limite monotone pour trouver sa limite en $+\infty$.

Or $\ln(2^n) = n \ln 2$, par suite $Q(2^n) = \frac{n}{2^n} \ln 2$ ce qui tend vers 0. Donc $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

Prenons $X = \frac{1}{x}$ et faisons tendre x vers 0 par la droite. Il vient $x \ln x = -\frac{\ln X}{X}$, ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc X vers $+\infty$: $\lim_{0^+} x \ln x = 0.$

Proposition 6 *Pour tout* $\alpha > 0$*,* $\lim_{0^+} x^\alpha \ln x = 0, \lim_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$

Pour tout α*,* $\lim_{-\infty} x^\alpha e^x = 0, \lim_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$

Preuve On prend pour variable $X = x^\alpha$. Lorsque x tend vers 0, X aussi puisque $\alpha > 0$, et $x^\alpha \ln x = \frac{1}{\alpha} X \ln X$. On fait de même pour l'autre limite.

Pour les deux autres propriétés, on se ramène aux précédentes en prenant pour variable $X = e^x$. $\square$

Remarque 2 *Inutile de se préoccuper de* $\alpha < 0$ *!*